Colle du 3 mars : Algèbre bilinéaire - Espaces euclidiens - Espaces hermitiens

18.1 Cours

Question de cours 1 : Décrire le procédé d'orthonormalisation de Schmidt.

Question de cours 2 : Classification des éléments de $O_3(\mathbb{R})$.

Question de cours 3 : Définition d'une forme quadratique non dégénérée.

18.2 Exercices

Exercice 0 : Tous les exercices de la semaine précédente.

Exercice 1 : Soient E un espace hermitien. Trouver tous les endomorphismes u de E d'adjoint u^2.

Exercice 2 : Soient E un espace hermitien et u un endomorphisme de E. On dit que u est normal si u et u^* commutent.
1. Montrer que si u est normal et v est un vecteur propre de u de valeur propre λ, alors v est un vecteur propre de u^* de valeur propre $\overline{\lambda}$.
2. Montrer que u est normal si, et seulement si, il est diagonalisable en base orthonormale.
3. Les matrices hermitiennes et les matrices unitaires sont-elles diagonalisables en base orthonormale ?
4. On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne usuelle. Soit u un automorphisme orthogonal. Montrer qu'il existe des sous-espaces E_1, E_{-1}, R_1, ..., R_m deux à deux orthogonaux tels que $u|_{E_1} = Id$, $u|_{E_{-1}} = -Id$, R_1, ..., R_m sont de dimension 2, et $u|_{R_i}$ est une rotation pour chaque i.

Exercice 3 : Soient E un espace hermitien et u un endomorphisme de E tel que les valeurs propres de $uu^* - u^*u$ sont réelles positives. Montrer que u est normal, c'est-à-dire que u et u^* commutent. On admettra que les endomorphismes normaux sont ceux qui sont diagonalisables en base orthonormale.